

# Olimpiada de Matematică

## Programa clasele V-XII

### Etapa locală

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse în mod implicit conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Cunoștințele suplimentare față de programa școlară pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

#### Clasa a V-a

##### • Etapa locală

##### Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică.

Metoda comparației. Metoda grafică. Metoda falsei ipotezei. Metoda mersului invers. Probleme de mișcare. Probleme de numărare. Principiul cutiei (Principiul lui Dirichlet). Metoda reducerii la absurd.

##### Numere naturale

Factorul comun. Teorema împărțirii cu rest. Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte. Sisteme de numerație. Divizibilitatea în  $\mathbf{N}$ . Numere prime. Descompunerea numerelor naturale în produs de factori primi.

##### Mulțimi

#### Clasa a VI-a

##### • Etapa locală

##### ALGEBRĂ

##### 1. Numere naturale

Proprietățile divizibilității în  $\mathbf{N}$ .

Criteriile de divizibilitate cu: 2; 5; 10;  $2^n$ ;  $5^n$ ; 3; 9; 7; 11; 13. Numere prime și numere compuse.

Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.;  $[a;b] \cdot (a;b) = a \cdot b$ . Numere prime între ele.  $a/bc$  și  $(a;b)=1 \Rightarrow a/c$ . Dacă  $(a;b) = d \Rightarrow \exists x, y \in \mathbf{N}$  astfel încât  $(x; y) = 1$  și  $a = xd$ ;  $b = yd$ .

Dacă  $[a;b] = m \Rightarrow \exists x, y \in \mathbf{N}$  astfel încât  $(x; y) = 1$  și  $m = ax$ ;  $m = by$ .

##### 2. Operații cu numere raționale pozitive

##### 3. Ecuații în $\mathbf{Q}_+$

##### GEOMETRIE

1. **Punct. Dreaptă. Semidreaptă. Segment** (conținutul programei școlare).

2. **Unghi** (conținutul programei școlare și, în plus, teorema directă și teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf).

3. **Congruența triunghiurilor** (conținutul programei școlare și cazul L.U.U.)

## Clasa a VII-a

### ALGEBRĂ

1. Mulțimea numerelor întregi; Mulțimea numerelor raționale; Mulțimea numerelor reale;

2. Modulul unui număr real. Proprietăți: a)  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ ; b)  $|x| = \max(-x; x), \forall x \in \mathbf{R}$ ; c)

$$|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbf{R};$$

d)  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}^*$ ; e)  $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$ ; f)  $|x| \leq a (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ ; g)

$$|x| \geq a (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \geq a \text{ sau } x \leq -a; \text{ h) } \sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbf{R}.$$

3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real; Reguli de calcul cu radicali (conținutul programei școlare).

a) Dacă  $a \in \mathbf{N}$  și  $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$ ; b) Dacă  $a, b \in \mathbf{N}$  și  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$  și  $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$ ;

c) Dacă  $a$  și  $b$  nu sunt pătrate ale unor numere raționale, atunci  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$ ; d) Dacă  $a, b \in \mathbf{Q}^*$  și

$\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^*$  astfel încât, atunci  $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbf{Q}^*$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$  și  $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ ; e) Dacă  $a, b \in \mathbf{Q}^*$  astfel

încât  $\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , atunci  $a \pm \sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  și  $a\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ; f) Dacă  $a \in \mathbf{Q}^*$  și  $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , atunci  $a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

și  $ab \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ; g)  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ , unde  $a, b, c \in \mathbf{R}^*$  și  $c^2 = a^2 - b$  (formula radicalilor

dubli).

### GEOMETRIE

1. Patrulater. Paralelogram. Pătrat. Dreptunghi. Romb. Trapez. Arii ale triunghiurilor și patrulaterelor studiate.

2. Asemănarea triunghiurilor. Teorema lui Thales

## Clasa a VIII-a

### ALGEBRĂ

1. Numere reale

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Ecuații. Modulul unui număr real. Ecuații.

Intervale. Intersecția și reuniunea intervalelor. Raționalizarea numitorului de forma  $a\sqrt{b}$  și  $a \pm \sqrt{b}$ ,

$a, b \in \mathbf{N}$ . Formulele de calcul prescurtat:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ;  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ;

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ;  $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ . Rapoarte de numere reale

reprezentate prin litere. Operații.

### GEOMETRIE

1. Probleme elementare de loc geometric.

2. Puncte, drepte, plane. Paralelism.

La conținutul programei școlare se adaugă: teoreme de paralelism; teorema lui Menelaos în spațiu; teorema reciprocă teoremei lui Menelaos; teorema lui Thales în spațiu; axe de simetrie ale paralelipipedului dreptunghic; axa de simetrie a piramidei patrulater regulate; simetria față de un plan; secțiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

### 3. Proiecții ortogonale pe un plan

La conținutul programei școlare se adaugă: perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremei celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector.

## Clasa a IX-a

### ALGEBRĂ

#### Mulțimi și elemente de logică matematică

- Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracționară a unui număr real; operații cu intervale de numere reale.
- Propoziție, predicat, cuantificatori.
- Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate, regulile lui De Morgan).
- Tipuri de raționamente logice: inducția matematică. Probleme de numărare.

#### Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale $\mathbf{N}$ (șir)

- Modalități de a defini un șir, șiruri mărginite, șiruri monotone; exemple simple
- Tipuri de șiruri: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcție de un termen dat și rație, suma primilor  $n$  termeni ai unei progresii
- Condiția ca  $n$  numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru  $n \geq 3$ .

### GEOMETRIE

#### Vectori în plan

- Segment orientat, relația de echipolență, vectori, vectori coliniari.
- Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare, înmulțirea cu scalari, proprietăți ale înmulțirii cu scalari, condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori dați, necoliniari și nenuli.

#### Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană

- Vectorul de poziție al unui punct.
- Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism).
- Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi).
- Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi; ortocentrul unui triunghi; relația lui Sylvester, concurența înălțimilor.
- Teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.

## Clasa a X-a

### ALGEBRĂ

#### Mulțimi de numere

- Numere reale: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv, aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale.
- Radical dintr-un număr rațional,  $n \geq 2$ , proprietăți ale radicalilor.
- Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare.

- Mulțimea  $\mathbb{C}$ . Numere complexe sub forma algebrică, conjugatul unui număr complex operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real.
- Rezolvarea în  $\mathbb{C}$  ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali. Ecuații bipătrate.
- Numere complexe sub forma trigonometrică (coordonate polare în plan), înmulțirea numerelor complexe și interpretare geometrică, ridicarea la putere (formula lui Moivre).
- Rădăcinile de ordinul  $n$  ale unui număr complex. Ecuații binome.

### **Funcții și ecuații**

- Funcția putere cu exponent natural  
f:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x)=x^n$  și  $n \geq 2$ .
- Funcția radical f:  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ,  $n \geq 2$ , unde  $\mathbb{D}=[0, \infty)$  pentru  $n$  par și  $\mathbb{D}=\mathbb{R}$  pentru  $n$  impar;
- Funcția exponențială f:  $\mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$ ,  $f(x)=a^x$ ,  $a \in (0; \infty)$ ,  $a \neq 1$  și funcția logaritmică f:  $(0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)=\log_a x$ ,  $a \in (0; \infty)$ ,  $a \neq 1$ , creștere exponențială, creștere logaritmică.
- Funcții trigonometrice directe și inverse.
- Ecuații iraționale.
- Ecuații exponențiale.
- Ecuații logaritmice.

## **Clasa a XI-a**

### *Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare*

#### **Permutări**

- Noțiunea de permutare, operații, proprietăți.
- Inversiuni, semnul unei permutări.
- Transpozitii; descompunerea unei permutari in produs de transpozitii

#### **Matrice**

- Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice.
- Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu scalar, proprietăți.
- Puterile unei matrice: metode de calcul
- Relatia Cayley-Hamilton, utilizarea în metode de calcul a puterilor unei matrice

#### **Determinanți**

- Determinant de ordin  $n$ , proprietăți.
- Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan.
- Rangul unei matrice.

### *Elemente de analiză matematică*

#### **Limite de funcții**

- Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile  $+\infty$  și  $-\infty$ .
- Funcții reale de variabilă reală: funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția radical, funcția logaritm, funcția exponențială, funcții trigonometrice directe și inverse.
- Limita unui șir utilizând vecinătăți, proprietăți.
- Șiruri convergente: intuitiv, comportarea valorilor unei funcții cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată, șiruri convergente: exemple semnificative:  $(a^n)_n$ ,  $(n^a)_n$ ,  $((1+1/n)^n)_n$ , operații cu șiruri convergente, convergența șirurilor utilizând proprietatea Weierstrass. Numărul  $e$ ; limita șirului  $((1+u_n)^{1/u_n})_n$ ;  $u_n \rightarrow 0$ .
- Criteriul lui Cesaro-Stolz
- Șiruri remarcabile (Euler, Lalescu, Wallis, Stirling)
- Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, calculul limitelor laterale.

- Calculul limitelor pentru funcțiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții :  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty-\infty$ ,  $0\cdot\infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ .
- Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, oblice.

## Clasa a XII-a

### *Elemente de algebră*

#### **Grupuri**

- Lege de compoziție internă, tabla operației.
- Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări,  $\mathbf{Z}_n$ ; ordinul unui element al unui grup; teoremele lui Lagrange și Cauchy pentru grupuri; condiții suficiente de comutativitate în grupuri.
- Morfism și izomorfism de grupuri.

### *Elemente de analiză matematică*

- Probleme care conduc la noțiunea de integrală.
- **Primitive** (antiderivate)
  - Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale.
  - Metode de calcul a primitivelor : - schimbarea de variabilă
    - calculul primitivelor unor funcții iraționale
    - calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice și hiperbolice.
- **Integrala definită.**